

长江下游旱涝与夏半年欧亚环流 30 ~ 60 天 振荡的年际变化*

杨秋明

(江苏省气象台, 南京, 210008)

摘 要

对 25 a(1971~1995 年)逐候东半球热带外 500 hPa 高度距平场进行小波分析和旋转主成分分析,研究了 30~60 d 低频振荡的时空变化及其与长江下游夏季旱涝和暴雨频数年际变化的关系。结果表明:6~10 月欧亚型(EU)低频振荡强度与长江下游暴雨频数成显著负相关,同时,提出了能揭示变量间非线性关系的对比函数分析(CFA)方法,发现当 5~8 月西太平洋型(WP)低频流型偏强时,长江下游暴雨频数增加,容易发生洪涝;反之,无明显影响。仅当前期 3~5 月南亚大陆型偏强时长江下游降水量偏少,而 3~5 月南亚大陆型偏弱时暴雨频数明显增加。因此,长江下游旱涝与低频流型异常之间同时存在线性和非线性相关。

关键词: 长江下游旱涝, 低频振荡强度, 年际变化, 对比函数分析, 非线性。

1 引 言

由于大气季节内振荡^[1]与甚低频振荡(如 QBO, ENSO)相互作用^[2~4],使得具有不同空间分布的 30~60 d 振荡型的强度产生显著的年际变化,从而引起持续性环流、降水的年际异常。文献[2]研究了华北地区汛期降水与 30~60 d 振荡强度年际变化的关系,发现了涝年低频振荡强于旱年,文献[4]讨论了黄河中下游地区夏季逐候降水量低频振荡及其与 QBO 的关系,上述研究尚未涉及长江流域地区降水量的年际变化。文中对近 25 a(1971~1995 年)东半球逐候 500 hPa 高度距平低频场进行旋转主成分分析,研究主要低频流型的年际变化特征及其与长江下游夏季降水量和夏半年暴雨频数的关系,为中长期天气预报提供有用信息。

2 资料和方法

2.1 资 料

文中采用 25 a(1971~1995 年)东半球 20~80 N, 0~180 E 范围内均匀分布的 60 个格点的逐候 500 hPa 高度距平,共 1800 候(由中国气象局提供),为了消除纬度之间的变化差异,所有格点资料场用局地标准差进行标准化处理。夏季(6~8 月)长江下游降水量由中国气象局提供的中国 160 站月降水水中选取安庆、南京和上海 3 站降水计算。夏半年长

* 初稿时间: 1999 年 9 月 14 日; 修改稿时间: 2000 年 4 月 3 日。

江下游暴雨频数取 1971~1995 年每年 4~9 月南京、镇江、常州、无锡、苏州 5 站中至少 3 站日降水量平均大于 50 mm 的天数。

2.2 方法

首先对 25 a 东半球逐候 500 hPa 高度距平场资料 $H_{m \times n} = (h_{ij})$, $m = 1800$, $n = 60$ 进行小波变换, 得到 30~60 d 低频高度距平场。小波变换采用

$$T_g(s, t) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} h(l) g\left(\frac{t-l}{s}\right) dl$$

上式中 s 是时间尺度, $g(l) = (1-l^2)e^{-l^2/2}$ 是基本小波(墨西哥帽状小波), 经数值试验, 当 $s = 2.8$ 时, $h(l)$ 滤波值的时间尺度变化在 30~60 d 之间(即 6~12 候)。这种变换具有较为客观地分离不同尺度扰动的能力, 优于常用的 Fourier 变换的信号处理方法^[5]。对 25 a (1800 候)、20 a (1440 候) 和 15 a (1080 候) 30~60 d 低频高度距平场分别进行主成分分析, 用不同样本长度所得到的特征向量间的夹角余弦绝对值^[6]考察特征向量的稳定性。计算结果表明, 前 5 个特征向量间的夹角余弦绝对值较大(大于 0.85), 具有较好的稳定性, 而从第 6 个开始变小, 表明噪声作用增强。所以选用前 5 个稳定的特征向量组成子矩阵按极大方差准则进行旋转, 得到区域特性显著的且方差贡献较大的空间分布型作为主要的低频流型(这里仅分析方差贡献大于 10.0% 的前 3 个低频流型), 并用各个旋转主成分的 12 候滑动方差表示低频振荡强度($S^i(t)$, $i = 1, 2, 3$) 时间变化, 分别计算各年长江下游夏季降水量和 4~9 月暴雨频数与夏半年不同时段(3~5 月, 4~6 月, ..., 8~10 月, 共 6 个时段) 低频流型强度(该时段对应的 $S^i(t)$ 的 18 候平均值, 例如 3~5 月, 即由每年 13~30 候计算平均值, 每个时段共有 25 a) 的线性相关系数, 讨论旱涝变化和暴雨频数与 30~60 d 低频振荡强度年际变化的关系。但降水量和暴雨频数序列呈较明显的不连续性, 因而用线性相关系数表示它与其它连续变量的关系有一定局限性。文献^[7]提出了用对比度分析研究离散变量和连续变量间的线性关系, 但不能很好地反映任意两个变量间的非线性联系。由于热源或环流异常与旱涝变化之间也存在明显的非线性关系^[8], 同一因子正、负距平造成的旱涝强度也不同(例如仅当一个因子正异常时, 另一因子正或负异常特别显著; 反之相关不显著), 因此, 文中提出了对比函数分析(CFA)方法研究这种相关的非对称结构。设 $X(t)$, $Y(t)$ 是两个气象要素距平序列(具有 0 均值), 序列长度是 N , X_+ , X_- 分别是满足 $Y(t) > A\sigma$ 和 $Y(t) < -A\sigma$ (σ 是 $Y(t)$ 的均方差, 常数 $A > 0$) 的 m 个值所对应的 $X(t)$ 的子序列 $X_1(t)$, $t = 1, 2, \dots, m$ 和 n 个值的子序列 $X_2(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$ 的平均值(一般 $1 \leq m \leq N/2$, $1 \leq n \leq N/2$)。 $X(t)$ 经过降序排列后的序列是 $X^*(t)$, 满足 $X^*(t+1) \leq X^*(t)$, $t = 1, 2, \dots, N-1$ 。它的前 m 个值和后 m 个值的平均值分别是 $X_h(> 0)$ 和 $X_b(< 0)$, 后 n 个值和前 n 个值的平均值分别是 $X_l(< 0)$ 和 $X_{hb}(> 0)$, 则对比函数定义为

$$C = f(Y, X) = C_{\pm}$$

即

$$C_+ = X_+ / X_a \quad C_- = X_- / X_b$$

且

$$X_a = \begin{cases} X_h & X_+ > 0 \\ -X_b & X_+ < 0 \end{cases} \quad X_b = \begin{cases} -X_{hb} & X_- > 0 \\ X_l & X_- < 0 \end{cases}$$

其中 C_+ 表示当 Y 是较大(本文中取 $A = 0.8$) 正距平时与 X 的正(负)相关关系, C_- 表示当 Y 是较大负距平时与 X 的正(负)相关关系, 即对于 Y 的不同距平状态 X 的响应也不同, 两个序列之间的相关是多值的。显然, $C_{\pm} \neq 1.0$ (证明见附录), 定义非线性相关强度指数 $I = C_+ - C_-$, I 越大, 相关的非对称性越明显 ($C_+ > C_-$ 或 $C_+ < C_-$), 表示非线性正、负相关越显著(文中取 $I > 0.20$ 时, 非线性相关显著); 反之, 线性相关显著 ($I = 0$, $C_+ = C_-$, C_+ 与 C_- 同号, 且 C_+ 和 $C_- > 0.30$; 仅当 $X(t) = \lambda Y(t)$, λ 是任意非零常数; $\lambda > 0$, $C_+ = C_- = 1.0$, $I = 0$ (或 $\lambda < 0$, $C_+ = C_- = -1.0$, $I = 0$), 线性正(负)相关最显著)。

3 结果分析

3.1 东半球 500 hPa 环流 30~60 天低频振荡的时空分布

图 1 是近 25 a (1800 个候) 东半球 500 hPa 30~60 d 低频高度距平场前 3 个主要的旋转特征向量的空间分布, 其方差贡献分别是 11.4%, 12.0% 和 10.7%。第一旋转型 (RPC1, 图 1a) 表现为东亚中低纬高度反相变化的翘翘板结构, 在热带西太平洋和北太平洋中纬各有一个负、正值中心, 定义为西太平洋型 (WP), 它与月平均高度距平场上的 WP 遥相关型类似。第二旋转型 (RPC2, 图 1b) 是沿欧亚中高纬度地区纬向传播的波列结构, 称为 EU 型, 相似于月平均图上的 EU 型, 而第三旋转型 (RPC3, 图 1c) 也是南北反相变化的翘翘板结构, 只不过正负中心分别在中国西部和西伯利亚附近, 称为南亚大陆型 (SA)。图 2 给出了前 3 个旋转主成分的 12 候滑动方差 $S_i^2(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 的时间变化曲线, 图中显示了明显的季节和年际变化, 表明东半球热带外地区大气环流季节内振荡的特点, 它不仅与大陆热力强迫作用有关, 而且受到热带内外环流相互作用的复杂影响, 造成大气内部热源分布异常, 所以显示出低频流型强度的多时间尺度变化特征, 且随季节而变化。图 3

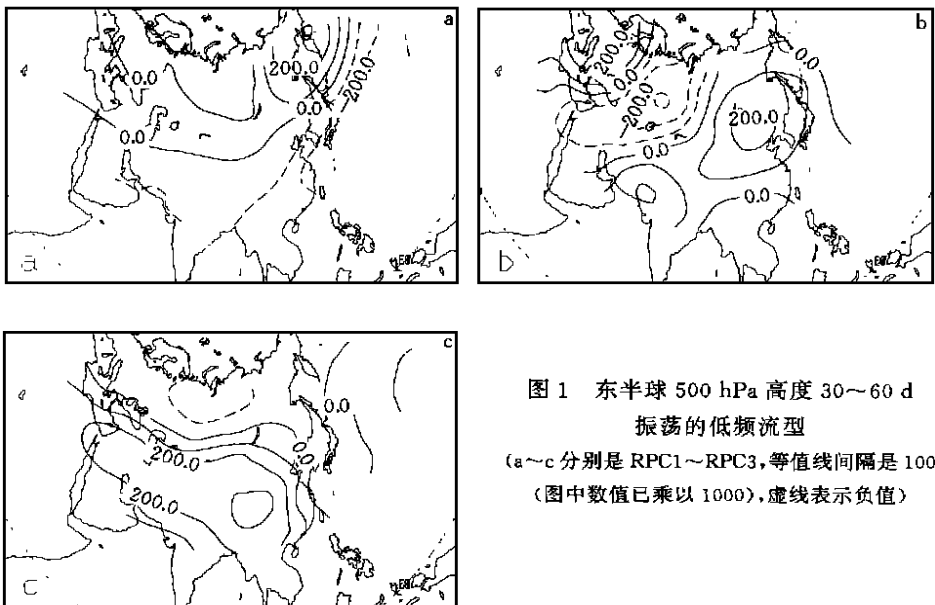


图 1 东半球 500 hPa 高度 30~60 d 振荡的低频流型

(a~c 分别是 RPC1~RPC3, 等值线间隔是 100 (图中数值已乘以 1000), 虚线表示负值)

给出了各候滑动方差的 25 a 平均, 从图中可以看出, 这 3 种低频流型均在冬季振荡强度较大, 5~8 月振荡强度较小, 同时年际变化也很显著。而对于热带地区季节内的振荡强度仅以年际变化为主, 与 ENSO 有关, 季节变化不明显^[2]。由上面分析可知, 欧亚地区 500 hPa 30~60 d 振荡主要由这 3 种低频流型决定, 它们的季节变化和年际变化对东亚冬季夏季风强度有显著影响, 从而对中国汛期旱涝年际变化起主导作用。

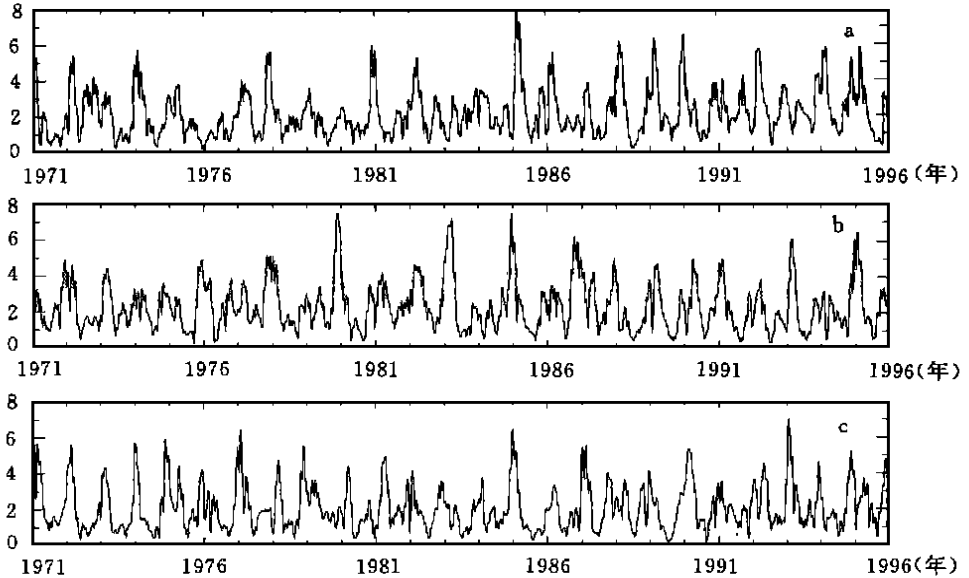


图 2 东半球环流 30~60 d 低频振荡强度的年际变化

(a. RPC1, b. RPC2, c. RPC3)

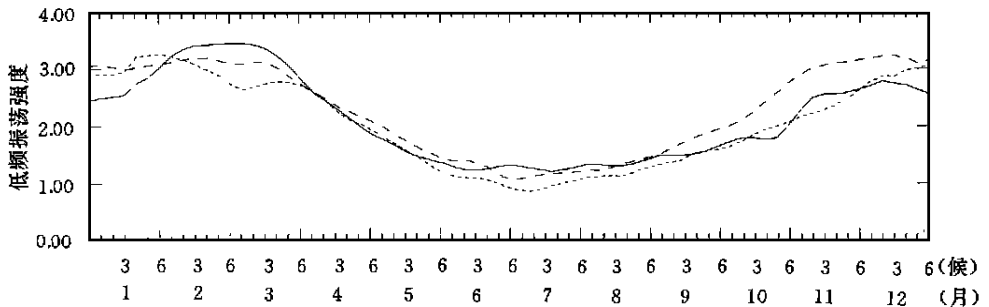


图 3 东半球环流 30~60 d 低频振荡强度的季节变化

(实线: RPC1, 虚线: RPC2, 点线: RPC3)

3.2 长江下游旱涝与低频流型的年际异常的关系

下面分析长江下游夏季(6~8月)降水量和4~9月暴雨频数与夏半年6个时段30~60 d低频振荡强度 $S_i^j(t)$ 的关系。表1是长江下游夏季降水量和暴雨频数与夏半年30~60 d低频振荡强度线性相关系数随季节的变化。序列长度 $N=25$, 当相关系数 $r=0.47$ 时, 达到0.02信度; $r=0.40$ 时, 达0.05信度。从表1中可以看出长江下游夏季降水量与夏半年6个时段30~60 d低频振荡强度的线性相关不显著, 但暴雨频数与

EU 型夏季 6~10 月振荡强度成极显著的负相关, 达 0.02 信度。即 EU 型振荡加强时, 中高纬低频系统占主导地位, 热带低频系统偏南, 不能到达较高纬度, 故长江下游暴雨频数减少; 反之, 暴雨频数增加。另外, 春季 3~5 月南亚型(SA) 振荡强度与随后 4~9 月的暴雨频数也呈较显著的负相关, 对当年暴雨频数变化趋势有很好的预示性。以上结果仅反映了线性相关, 事实上, 环流异常与旱涝变化可能存在明显的非线性关系, 某种符号的环流异常造成的旱涝异常强度也不同, 以下用对比函数分析(CFA) 揭示这种非线性关系。

表 1 长江下游夏季降水量和夏半年暴雨频数与 30~60 d 低频振荡强度的线性相关系数

	降水量			暴雨频数		
3~5 月	-0.16	0.03	-0.09	0.17	0.12	-0.43
4~6 月	-0.06	0.07	-0.08	0.19	-0.13	-0.27
5~7 月	0.09	0.12	-0.20	0.33	-0.29	-0.33
6~8 月	0.23	-0.12	-0.01	0.28	-0.52	-0.38
7~9 月	0.18	-0.35	0.21	0.16	-0.57	-0.24
8~10 月	0.25	-0.16	0.30	0.16	-0.46	-0.01

表 2 是长江下游 6~8 月降水量和 4~9 月暴雨频数(Y) 与 3~10 月这 3 种流型各时段 30~60 d 低频流型强度(X) 变化的对比函数值。从表中可以看出, 上述线性关系中 6~10 月 EU 型强度与暴雨频数的线性关系仍然存在, 而不同的是这 3 种低频振荡强度与降水量和暴雨频数之间的非线性关系更显著。当 5~8 月 WP 型增强时, 暴雨频数增加, 当 WP 型减弱时, 无明显关系, 即相关具有非对称结构。所以 5~8 月 WP 型增强, 西太平洋副热带高压将稳定维持在 25°N 附近, 季风雨带维持在长江流域, 有利于暴雨频繁发生, 长江下游容易形成洪涝; 反之, WP 型减弱, 与季风雨带相联系的降水的低频振荡也减弱, 雨带位置南北摆动幅度增大, 暴雨不一定发生在长江下游, 故 C - 值不大; 但是各时段 WP 型强度与降水量的非线性关系仍然不明显。同样, 从表 2 还可发现 6~10 月 EU 型强度与暴雨频数还呈现较显著的非线性负相关(暴雨频数偏多时 EU 型偏弱更显著), 反映了长江下游暴雨对秋季欧亚中高纬环流的反馈作用。EU 型强度与夏季降水量则存在极强的非线性时滞相关, 4~9 月弱 EU 型(特别是 4~6 月) 将引起长江下游夏季降水量偏少(C - > 0), 并且夏季多雨伴随着 6~10 月弱 EU 型(特别是多雨年 7~9 月 EU 型偏弱更明显, C + < 0)。这是因为春季和初夏东亚中低纬环流相互作用减弱, 不利于南海和西太平洋热带地区对流加强, 东亚季风减弱; 而夏季长江下游多雨表明东亚季风活跃, 长江下游由热带低频系统控制的时间变长, 使得秋季由夏季流型向冬季流型转换的时间推迟, 欧亚中高纬低频系统活动范围偏北, 强度减弱, 所以造成秋季弱 EU 型。各时段 EU 型强度与降水量的其它异常状态间的相关不显著。另外, 3~5 月南亚型(SA) 强度与降水量、暴雨频数也成极强的非线性相关, 仅当 SA 型偏强时, 降水量显著偏少(图 4, C - < 0); 而仅当 SA 型偏弱时 4~9 月暴雨频数明显增加(表 2), 即春季亚洲南部和青藏高原附近低频振荡活跃时, 夏季流型出现时间提前, 西太平洋副热带高压位置偏北, 初夏东亚季风雨带迅速北移到黄淮流域, 所以夏季长江下游 6~8 月雨量减少。3~5 月 SA 型偏弱时, 亚洲南部和青藏高原附近低频振荡减弱, 这时东亚中低纬低频系统活跃, 且东亚中低纬环流之间相互作用增强, 可导致 4~9 月长江下游暴雨过程频繁发生。值得注意的是, 仅当夏季降水量偏多

时, 7~9 月 SA 型偏强 ($C_+ > 0$), 而 8~10 月时呈现较显著的线性正相关 ($C_+ > 0, C_- > 0, I = 0$), 它表明夏季长江下游降水量偏多, 导致东亚夏秋季大气内部加热异常, 从而使得 SA 型低频振荡活跃; 反之, 秋季 SA 型低频振荡减弱, 且这种相关关系由 7~9 月的强非线性变为 8~10 月的较显著的线性相关 (表 2), I 从 0.40 减小为 0.04, 它体现了大气内部动力过程激发的低频流型强度演变的一种型式。当两者都处于其它异常状态时, 相关不显著。这与上述线性相关分析的结果不同。

表 2 长江下游夏季降水量和夏半年暴雨频数与 30~60 d 低频振荡强度的对比函数

	降雨量(+ -)								
	WP		I_1	EU		I_2	SA		I_3
3~5 月	-0.40	-0.27	0.13	-0.37	0.42	0.05	0.00	-0.54	0.54
4~6 月	-0.45	-0.29	0.14	-0.09	0.52	0.43	-0.01	-0.45	0.44
5~7 月	-0.20	-0.14	0.06	0.02	0.45	0.43	-0.14	-0.52	0.38
6~8 月	0.09	0.02	0.07	-0.29	0.25	0.04	0.11	-0.20	0.09
7~9 月	0.12	0.00	0.12	-0.63	0.23	0.40	0.40	0.00	0.40
8~10 月	0.28	-0.10	0.18	-0.54	0.28	0.26	0.46	0.42	0.04

暴雨频数(+ -)

	暴雨频数(+ -)								
	WP		I_1	EU		I_2	SA		I_3
3~5 月	0.12	0.22	0.10	0.42	0.17	0.25	-0.54	-0.06	0.48
4~6 月	0.29	0.27	0.02	0.05	-0.27	0.22	-0.38	0.01	0.37
5~7 月	0.64	-0.03	0.61	-0.22	-0.45	0.23	-0.38	-0.22	0.16
6~8 月	0.44	-0.01	0.43	-0.63	-0.43	0.20	-0.41	-0.23	0.18
7~9 月	0.28	-0.06	0.22	-0.67	-0.22	0.45	-0.22	-0.15	0.07
8~10 月	0.31	-0.02	0.29	-0.63	-0.34	0.29	-0.05	-0.01	0.04

表中 $c_{\pm}, I_i (i=1, 2, 3)$ 表示非线性相关强度

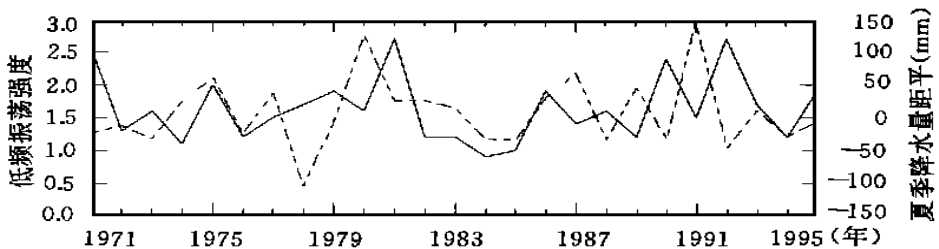


图 4 东半球 30~60 d 低频振荡强度和长江下游夏季降水量距平的逐年变化曲线

(实线: 低频振荡强度; 虚线, 夏季降水量距平; 单位: mm)

综上所述, 长江下游夏季降水量和夏半年暴雨频数与夏半年 30~60 d 低频振荡强度密切相关, 且这种影响具有时间局域性的特点。欧亚中高纬波列与长江下游暴雨的线性负相关在 6~10 月最强, 而西太平洋型强度的变化除了偏强时对 4~9 月暴雨频数有明显影响外, 偏弱时无直接影响。春季欧亚型强度偏弱对应于夏季少雨, 但夏季多雨容易引起秋季欧亚型强度偏弱; 此外, 与亚洲中、南部大陆不均匀加热有关的南亚型(SA) 春季强度的变化直接影响后期长江下游旱涝形成, 且仅当春季 SA 型显著时, 后期长江下游夏季降水量减少; 仅当春季 SA 型减弱时, 暴雨频数增加, 这对长江下游旱涝长期预测是有用的。以

上结果说明低频振荡强度与旱涝之间同时存在线性和非线性关系,局地气候异常由各种不同空间分布的低频流型变化的共同作用引起,并且异常的不同状态与环流型的联系也有显著差异。

4 结 论

(1) 用旋转主成分分析得到东半球 500 hPa 30~60 d 低频振荡的 3 种显著的低频流型: 西太平洋型(WP)、欧亚型(EU)和南亚大陆型(SA), 它们的振荡强度具有显著的季节变化和年际变化, 与亚洲冬夏季风变化密切相关。

(2) 由于东半球 500 hPa 30~60 d 低频振荡受到欧亚大陆不均匀加热、热带海洋热力强迫和大气内部动力过程的共同作用, 因此, 它与旱涝气候异常之间同时存在线性和非线性关系, 用对比函数分析(CFA)可以揭示不同距平状态间相关的差异。

(3) 长江下游暴雨频数与 6~10 月 EU 型强度成显著线性负相关, 对比函数分析表明 5~8 月 WP 型增强时, 暴雨频数增加; 而 WP 型减弱时, 对暴雨频数变化无明显影响。春季弱 EU 型对应于夏季少雨, 但夏季多雨将导致秋季弱 EU 型; 反之, 夏半年各时段的 EU 型强度与夏季降水量异常状态之间的时滞相关不明显。仅当 3~5 月 SA 型增强时, 夏季降水量显著偏少; 仅当 3~5 月 SA 型偏弱时, 暴雨频数明显增加, 它对长江下游旱涝变化有较好的预示性。另外, 长江下游夏季降水量与秋季 SA 型强度存在较显著的正相关, 且这种相关从 7~9 月的强非线性到 8~10 月变为较显著的线性相关, 它反映了大气内部动力过程激发的低频流型强度演变的一种型式。

参考文献

- 1 Madden R A, Julian P R. Description of global scale circulation cells in the tropics with a 40~50 day period. *J Atmos Sci*, 1972, 29: 1109~1123
- 2 李崇银. 大气低频振荡. 北京: 气象出版社, 1993. 50~83
- 3 孙安键, 唐国利, 黄荣辉. 1983 年与 1985 年夏季北半球 500 hPa 高度场大气低频波的振荡特征. *大气科学*, 1994, 18(5): 576~585
- 4 黄嘉佑, 符长锋. 黄河中下游地区夏季逐候降水量的低频振荡特征. *大气科学*, 1993, 17(3): 379~383
- 5 刘太中, 荣平平, 刘式达等. 气候突变的子波分析. *地球物理学报*. 1995, 38(2): 158~162
- 6 杨秋明. 北半球夏季 500 hPa 候平均高度场的遥相关和环流特征. *大气科学*, 1993, 17(2): 148~154
- 7 王沛霖. 珠江三角洲局地强风暴发生的环境条件. *气象学报*, 1994, 52(2): 252~256
- 8 Hoerling M P, Kumar A, Zhong M. El Niño, La Nina and nonlinearity of their teleconnections. *J Climate*, 1997, 10(8): 1769~1786

THE DROUGHT/ FLOOD IN THE LOW REACHES OF YANGTZE RIVER AND THE INTERANNUAL VARIATIONS OF THE 30– 60 DAY OSCILLATION OF EURASIAN CIRCULATION DURING SUMMER HALF YEAR

Yang Qiuming

(*Jiangsu Meteorological Observatory, Nanjing 210008*)

Abstract

The relationships between the interannual variations on the intensity of LFO(30–60 days) of Eurasian circulation during summer half years and the rainfall in summer and the number of heavy rains in the low reaches of Yangtze River have been investigated by using wavelet analysis and rotated principal component analysis based on the data of the pentad mean 500 hPa height field over the Eastern Hemisphere for the 25 years period 1971–1995. The results indicated that there exists a dominant negative correlation between the intensity of LFO(30–60 d) for Eurasian pattern (EU) from June to October and the number of heavy rains in the low reacher of Yangtze River. Meantime, the contrast function analysis (CFA) is proposed with identifying nonlinear relationships between the two variables. In addition, it is found that the number of heavy rains is enhanced and the floods are caused easily when the intensity of the Western Pacific pattern (WP) enhances during the period of May–August by means of the CFA, but the effect is less significant when WP pattern reduces. The rainfall in summer is reduced significantly, only when the intensity of the Southen Asia pattern (SA) is enhanced but the number of heavy rains increased, only when the lin-tensity of SA is reduced during the period of March–May. Hence, the linear or nonlinear correlation may exist simultaneously between the drought/flood and low frequency flow patterns.

Key words: Drought/ flood in the low reaches of Yangtze River, LFO intensity, Inter-annual variation, Contrast function analysis (CFA), Nonlinearity.

附录: $C_{\pm} = 1$ 的证明:

设任意两个 0 均值序列 $X(t), Y(t), t = 1, 2, \dots, N$, X_+ 和 X_- 分别是满足 $Y(t) > A\sigma_y$ 和 $Y(t) < -A\sigma_y$ (σ_y 是 $Y(t)$ 的均方差, A 是大于零的常数) 的 m 个值所对应的 $X(t)$ 的子序列 $X_1(t), t = 1, 2, \dots, m$ 和 n 个值的子序列 $X_2(t), t = 1, 2, \dots, n$ 的平均值(一般情况下, $1 \leq m \leq N/2, 1 \leq n \leq N/2$)。

$X(t)$ 经过降序排列后的序列是 $X^*(t)$, 满足 $X^*(t+1) \leq X^*(t), t = 1, 2, \dots, N-1$ 。它的前 m 个值和后 m 个值的平均值分别是 $X_h (> 0)$ 和 $X_{lh} (< 0)$, 后 n 个值和前 n 个值的平均值分别是 $X_l (< 0)$ 和 $X_{lh} (> 0)$ 。子序列 $X_1(t)$ 经过降序排列后的序列是 $X_1^*(t)$, 它也是 $X^*(t)$ 的子序列, 所以有 $X_1^*(1) \leq X^*(1), \dots, X_1^*(m) \leq X^*(m)$, 因此, $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_1^*(k) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X^*(k)$, 并且 $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_1(k) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_1^*(k)$ (有限序列重排不改变序列的和), 所以 $X_+ \leq X_h$ 。若 $X_+ > 0$, 则有 $X_+ \leq X_h$, 所以 $C_+ = X_+ / X_h \leq 1$; 若 $X_+ < 0$, 考虑序列 $Z(t) = -X(t)$, $Z(t)$ 的降序排列序列是 $Z^*(t)$, 它与 $X^*(t)$ 的顺序正好相反, 即 $Z^*(t) = X^*(N-t+1), t = 1, 2, \dots, N$, 用上述方法可证 $0 < -X_+ = Z_+ < Z_h, Z_+ \leq Z_h$ 。因为 $Z_h = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Z^*(k) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X^*(N-k+1)$, 令 $Z_h = X_{lh}$, 可得 $Z_+ / Z_h = X_+ / X_{lh} \leq 1$, 所以 $C_+ \leq 1$ 。同理可证 $C_- \leq 1$ 。

当 $X(t) = \lambda Y(t)$ (λ 是任意非零常数) 时 $X_1(t)$ 与 $X_1^*(t)$ 的 m 个数值相同, 仅排列顺序不同, 所以 $X_+ = X_h, C_+ = 1$; 同理 $C_- = 1$ 。因此 $C_{\pm} = 1$ 。